Tentamen Signalen en Systemen

31 oktober 2003, 9.00–12.00

□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□

Belangrijke punten:

- U bent verplicht om uw collegekaart tijdens de tentamen mede te nemen.
- Schrijf zo netjes mogelijk met een pen of vulpen (geen potlood).
- Vul de kop van het eerste blad volledig in.
- Nummer de bladen en zet bovenaan het eerste blad het totaal aantal ingeleverde bladen en voorzie ieder blad van uw naam.
- Schrijf uw naam op de envelop. Na afloop van de toets doet u uw werk in de envelop en levert deze in. Plak deze envelop niet dicht.
- Lees de opgaven eerst rustig door.
- Besteed niet te veel tijd aan een enkele opgave.
- Het gewicht van iedere opgave is in procenten vermeld.

– – SUCCES – –

Opgave 1: (20%)
Een ronddraaiende rotor met 25 identieke rotorbladen van een ventilator wordt beschenen door een TL-buis. De TL-buis is op het lichtnet aangesloten en het licht wordt opgewekt door gasontladingen. Er vinden 2 gasontladingen per periode plaats en de frequentie van het lichtnet is 50 Hz.

1. Bepaal de laagste draaisnelheid van de rotor in toeren per minuut (rpm) zodanig dat het lijkt dat de rotor stilstaat.
2. Bepaal de laagste draaisnelheid van de rotor in toeren per minuut (rpm) waarbij het lijkt alsof het aantal rotorbladen is verdubbeld.

Opgave 2: (30%)
Beschouw het filter met input x en output y dat beschreven wordt door de differentievergelijking:

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n] + \frac{3}{2}x[n-1] - \frac{1}{2}x[n-3]$$

1. Bepaal de overdrachtsfunctie $H(z)$.
2. Bepaal de gelijkstroomversterking (DC-amplification) van dit filter.
3. Maak een polen-nulpunten plot.
4. Bestaat er een eenvoudiger filter met dezelfde functionaliteit? Zo ja geef de differentievergelijking, zo nee waarom niet.

Opgave 3: (25%)

Gegeven een analoog filter dat bestaat uit een serieschakeling van een weerstand en een condensator, een RC-filter, met als overdrachtsfunctie van de invoerspanning $x(t)$ naar de uitvoerspanning $y(t)$:

$$H(s) = \frac{1}{1 + RCs}$$

1. Gegeven de invoerspanning $x(t) = V + V \cdot cos(\omega t)$ met $\omega = 1/(RC)$. Bepaal de uitvoerspanning als functie van de tijd t.
2. Bepaal de differentiaalvergelijking die het verband tussen $x(t)$ en $y(t)$ beschrijft.
3. Bereken de modulus van de overdrachtsfunctie $|H(j\omega)|$.
4. Teken de modulus van de overdrachtsfunctie $|H(j\omega)|$ als functie van de hoekfrequentie ω.

Opgave 4: (25%)
Beschouw een tijddiscreet filter met de impulsrespons:

$$h[n] = \begin{cases} a^n & \text{voor} \quad n \geq 2 \\ 0 & \text{voor} \quad n < 2 \end{cases}$$

1. Is dit filter causaal? Beargumenteer uw antwoord.
2. Is dit filter stabiel? Beargumenteer uw antwoord.
3. Bepaal de staprespons van dit filter.
4. Bepaal de output $y[n]$ als de input $x[n]$ gefilterd wordt met dit filter, waarbij:
$$x[n] = u[n+2] - u[n-2]$$
met de functie $u[n]$ bedoelen we de eenheidsstapfunctie (unit-step).

Opgave 1:

1. De knipperfrequentie van de TL-buis is $2 \times 50 = 100$ Hz. Bij de laagste draaisnelheid draait de rotor precies $1/25$ slag in $1/100$ s. In 1 seconde draait de rotor dus $100/25$ slag ofwel 4 toeren per seconde. 4 toeren per seconde komt overeen met 240 toeren per minuut.
2. De schijnbare verdubbeling van het aantal rotorbladen is het gevolg van een rotatiesnelheid van $1/50$ slag in plaats van $1/25$ slag in $1/100$ s. In 1 seconde draait de rotor nu $100/50$ slag ofwel 120 toeren per minuut.

Opgave 2:

1. De overdrachtfunctie $H(z)$ is:

$$H(z) = \frac{1 + \frac{3}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

2. Substitueer $\hat{\omega} = 0$ voor een gelijkspanning in $z = e^{j \cdot \hat{\omega}}$. Hieruit volgt $z = 1$. Substitueer nu $z = 1$ in $H(z)$. Hieruit volgt de gelijkspanningsversterking $H(1) = 4$.
3. Na enig formule manipuleren is de overdrachtsfunctie te schrijven als:

$$H(z) = \frac{(z+1)^2(z - \frac{1}{2})}{z^2(z - \frac{1}{2})}$$

Hieruit lezen we af dat er een dubbel nulpunt is in $z = -1$, een nulpunt in $z = \frac{1}{2}$, een dubbele pool in $z = 0$ en een pool in $z = \frac{1}{2}$. Het moge duidelijk zijn dat de pool en het nulpunt in $z = \frac{1}{2}$ tegen elkaar wegvallen.
4. Op grond van het voorgaande is de vereenvoudigde overdrachtsfunctie:

$$H(z) = \frac{(z+1)^2}{z^2} = 1 + 2z^{-1} + z^{-2}$$

De gezochte differentie vergelijking van het vereenvoudigde filter luidt

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

Opgave 3:

1. De input bestaat uit de som van twee harmonische functies met respectievelijk $\omega = 0$ en $\omega = \frac{1}{RC}$. Voor beide frequenties bepalen we

de versterking en de faseverschuiving. De DC-versterking is $H(s)$ met $s = j\omega = 0$; hieruit volgt $H(0) = 1$. $H(0) = 1$ is reëel, dus er is geen faseverschuiving. De versterking voor $\omega = 1/(RC)$ vinden we door $s = j\omega = j/(RC)$ in $H(s)$ te substitueren. $H(s) = \frac{1}{1+j}$. Hieruit volgt $|H(s)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ en $\arg(H(s)) = -\pi/4$. De uitvoerspanning is dus $y(t) = V + V/\sqrt{2} \cdot cos(\omega t - \pi/4)$.

2. We realiseren ons dat $s = \dfrac{\partial}{\partial t}$ Na enig formule mannipulatie schrijven we $y(t) = H(s) \cdot x(t)$ als $y(t) = x(t) - RC \cdot s \cdot y(t)$ ofwel $y(t) = x(t) - RC\dfrac{\partial}{\partial t}y(t)$.
3. We berekenen eerste het product $(1 + j\omega RC)(1 - j\omega RC)$ en vereenvoudigen dit tot $1 + \omega^2(RC)^2)$. Hieruit volgt dat:

$$|H(j\omega)| = \sqrt{|H(j\omega)|^2} = \sqrt{\frac{1}{(1 + j\omega RC)(1 - j\omega RC)}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \omega^2(RC)^2)}}$$

4. De gevraagde modulus van de overdrachtdfunctie is een symmetrische klokkromme met als symmetrieas $\omega = 0$. De kromme heeft zijn maximum bij $|H(j0)| = 1$ en bezit een asymptoot $|H(j\omega)| \to 0$ voor $\omega \to \infty$. De kromme raakt de x-as niet. Een paar markante punten vinden we door te stellen dat $\omega^2(RC)^2$ geheeltallig is. $\left|H(j\frac{1}{RC})\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7$, $\left|H(j\frac{2}{RC})\right| = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx= 0.45$ en $\left|H(j\frac{3}{RC})\right| = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx= 0.3$

Opgave 4:

1. Dit filter is causaal omdat $h[n] = 0$ voor $n < 0$. Bovendien een RC-filter is een fysisch systeem en alle fysische systemen zijn causaal.
2. De stabiliteit van het filter hangt af van a. Het filter is stabiel voor $|a| < 1$ en niet stabiel voor $|a| > 1$. Voor een instabiel filter dooft de impulsrespons niet uit en ligt de pool buiten de eenheidscirkel.
3. Voorzover het filter stabiel is bepalen we de staprespons. We maken gebruik van de eigenschap

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

We bepalen de staprespons door de impulsrespons te sommeren.

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[n] = \sum_{k=2}^{n} a^n = \left(a^2 \sum_{k=0}^{\infty} a^n\right) - \left(a^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} a^n\right)$$

Voor $n \geq 2$ berekenen we

$$s[n] = a^2 \frac{1}{1-a} - a^{n+1} \frac{1}{1-a} = \frac{a^2 - a^{n+1}}{1-a}$$

Uiteraard geldt voor $n < 2$ dat $s[n] = 0$.

4. Op basis van de eigenschappen van een Lineair Tijd Invariant systeem gegeven de input

$$x[n] = u[n+2] - u[n-2]$$

bepalen we de output

$$y[n] = s[n+2] - s[n-2]$$

Hierbij is voor de somregel gebruik gemaakt van de lineariteit van het systeem en voor de tijd-verschuivingsregel van de tijdinvariantie van het systeem. We werken dit uit tot

$$y[n] = \begin{cases} 0 & \text{voor} \quad n < 0 \\ \dfrac{a^2 - a^{n-1}}{1-a} & \text{voor} \quad 0 \leq n < 4 \\ \dfrac{a^{n-1} - a^{n+3}}{1-a} & \text{voor} \quad 4 \leq n \end{cases}$$